ثانوية بن بولعيد – باتنة- العام الدراسي 2016-2015 القسم النهائي:

المحور الأول:الدوال الأصلية

إعداد الأستاذ: جرادي سلطان- ثانوية بن بولعيد

1) نعتبر الدالتين f و F المعرفتين على $]-3;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{-x^2-6x}{(x+3)^2}$ و $F(x)=\frac{2x-3}{x+3}-x$

- تحقق أنه من أجل كل x من $]-3;+\infty[$ ، $F'(x)=f(x)$
- اقترح دالة أخرى G بحيث من أجل كل x من $]-3;+\infty[$ ، $G'(x)=f(x)$

نقول أن F و G دالتان أصليتان للدالة f على $]-3;+\infty[$.

تعريف: f و F دالتان معرفتان على مجال I و f قابلة للاشتقاق على I .

إذا كان من أجل كل x من I ، $F'(x)=f(x)$ نقول أن:

- f هي الدالة المشتقة للدالة F .
- F دالة أصلية للدالة f على I .

نتائج مباشرة من التعريف:

- لكل دالة مستمرة عدد غير منته من الدوال الأصلية
- الفرق بين كل دالتين أصليتين لنفس الدالة هو عدد ثابت
- **مجموعة الدوال الأصلية لدالة**

خواص (تقبل دون برهان):

*إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل دوالا أصلية على I .

*إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال $x\mapsto F(x)+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

مثال محلول(1):

نعتبر الدالتين f و F المعرفتين على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=-\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$ و $F(x)=\frac{x-1}{x+1}-2x$

بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

طريقة:لإثبات أن F دالة أصلية لـِ f على مجال I يكفي أن نثبت أن F قابلة للاشتقاق على I و أن من أجل كل x من I ، $F'(x)=f(x)$.

الحل:

F دالة ناطقة معرفة على $]-1;+\infty[$ فهي إذن قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ و من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ لدينا:

$$F'(x)=\frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2}-2=\frac{2}{(x+1)^2}-2$$

و منه: $F'(x)=\frac{2-2(x+1)^2}{(x+1)^2}=\frac{2\left[1-(x+1)^2\right]}{(x+1)^2}=\frac{2\left[(1-x-1)(1+x+1)\right]}{(x+1)^2}=\frac{-2x(x+2)}{(x+1)^2}$

و بالتالي: $F'(x)=\frac{-2x^2-4x}{(x+1)^2}=-\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}=f(x)$

و هكذا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $F'(x)=f(x)$. إذن F دالة أصلية لـِ f على المجال $]-1;+\infty[$.

مثال محلول(2):

نعتبر الدالتين F و G المعرفتين على $]2;+\infty[$ كما يلي:

$$F(x)=\frac{x^2-2x+3}{x-2} \quad \text{و} \quad G(x)=\frac{2x-1}{x-2}+x$$

باستعمال طريقتين مختلفتين بين أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة.

الحل:

الطريقة الأولى: نبين أنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$ ، $F'(x)=G'(x)$

من أجل كل x من $]2;+\infty[$ ، $F'(x)=\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$ و $G'(x)=\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$

إذن من أجل كل x من $]2;+\infty[$ ، $F'(x)=G'(x)$. الدالتان هما إذن دالتان أصليتان لنفس الدالة.

الطريقة **ألثانية:** نبين أنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$ ، $F(x)-G(x)=k$ حيث k عدد حقيقي.

من أجل كل x من $]2;+\infty[$ ، $F(x)-G(x)=\left(\frac{x^2-2x+3}{x-2}\right)-\left(\frac{2x-1}{x-2}+x\right)=\frac{-2(x-2)}{x-2}=-2$

الدوال الأصلية لدوال مألوفة

من خلال قراءة جيدة و عكسية للدوال المشتقة لدوال مألوفة يمكن لنا تلخيص جدول باهم الدوال الاصلية لدوال مألوفة:

المجال I هو	الدوال الأصلية لـِ f على I هي الدوال المعرفة بـِ	f دالة معرفة على I بـِ

$f(x)=$	$F(x)=$	
(a عدد حقيقي) a	$ax+c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2+c$	$\mathbb{R}$
($n\in\mathbb{N}^*$) x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$	$]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$
($n\geq 2$ و $n\in\mathbb{N}$) $\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$

الدوال الأصلية و العمليات على الدوال

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .

الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على I	شروط على الدالة u
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2+c$	
($n\in\mathbb{N}^*$) $u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+c$	من أجل كل x من I ، $u(x)\neq 0$
($n\geq 2$ و $n\in\mathbb{N}$) $\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	من أجل كل x من I ، $u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	من أجل كل x من I ، $u(x)>0$

مثال محلول(3):

عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

$$* \; f(x)=x^3-3x+5 \text{ و } I=\mathbb{R} \quad * \; g(x)=\frac{2}{x^2} \text{ و } I=]-\infty;0[\quad * \; h(x)=\frac{3}{x^3}-\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ و } I=]0;+\infty[$$

الحل:

* دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ معرفة بـ: $F(x)=\frac{1}{3+1}x^{3+1}-3\times\frac{1}{2}x^2+5x=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+5x$

* دالة أصلية G للدالة g على $I=]-\infty;0[$ معرفة بـ: $G(x)=2\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{2}{x}$

* دالة أصلية H للدالة h على $I=]0;+\infty[$ معرفة بـ: $H(x)=3\left(-\frac{1}{(3-1)x^{3-1}}\right)-2\sqrt{x}=-\frac{3}{2x^2}-2\sqrt{x}$

مثال محلول(4):

عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

$$I=\mathbb{R} \text{ و } * \; g(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad I=\mathbb{R} \text{ و } * \; f(x)=(x+1)(x^2+2x+5)^2$$

طريقة: لتعيين دالة أصلية على مجال I لدالة f يمكننا:

1. ملاحظة إذا كانت f تكتب على أحد الأشكال $u'u^n$ أو $\frac{u'}{u^n}$ أو $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ مع تحديد عبارة $u(x)$.
2. حساب $u'(x)$ ثم تحديد عددا حقيقيا k بحيث $f=k\times u'u^n$ أو $f=k\times\frac{u'}{u^n}$ أو $f=k\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$.
3. تطبيق قواعد الدوال الأصلية.

الحل:

- يظهر و أن الدالة f من الشكل $u'u^n$ مع $u(x)=x^2+2x+5$.

لدينا $u'(x)=2x+2$ أي أن $u'(x)=2(x+1)$ و منه $x+1=\frac{1}{2}u'(x)$

نجد هكذا أن: $f(x)=\frac{1}{2}u'(x)\times[u(x)]^2$ أي أن $f=\frac{1}{2}\times u'u^2$.

و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}[u(x)]^3$ أي $F(x)=\frac{1}{6}(x^2+2x+5)^3$.

- يظهر و أن الدالة g من الشكل $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ مع $u(x)=x^2+1$.

لدينا $u'(x)=2x$ أي أن و منه $3x=\frac{3}{2}u'(x)$ نجد هكذا أن: $g(x)=\frac{3}{2}\times\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ أي أن $g=\frac{3}{2}\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$.

و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $G(x)=\frac{3}{2}\times2\sqrt{u(x)}=3\sqrt{u(x)}$ أي $G(x)=3\sqrt{x^2+1}$.

الدالة الأصلية و مساحة حيز تحت منحن

خاصية (دون برهان): f دالة مستمرة و موجبة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \le b$. (C_f) منحنى f في معلم متعامد $(O;A,B)$ و F دالة أصلية لـِ f على I.

مساحة الحيز تحت المنحنى (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$.

تعريف: f دالة مستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I.

يسمى العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ ، حيث F دالة أصلية لـِ f على I ، التكامل من a إلى b لـِ f و نرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x)dx$.

نتيجة: من تطبيقات التكامل:

f دالة مستمرة و موجبة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \le b$. (C_f) منحنى f في معلم متعامد $(O;A,B)$ و F دالة أصلية لـِ f على I.

مساحة الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)dx$

خواص التكامل:

f و g دالتان معرفتان و مستمرتان على مجال I.

1. الخطية

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I و من أجل كل عدد حقيقي k لدينا:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad (1)$$

$$\int_a^b k f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad \textbf{(2)}$$

2) الترتيب

خواص: a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \le b$.

(1) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$ ، $f(x) \ge 0$ فإن $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

(2) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$ ، $f(x) \le g(x)$ فإن $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

3) علاقة شال

خواص: من أجل كل أعداد حقيقية a ، b و c من I لدينا: $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

مثال محلول(1):

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

بين أنه من أجل كل x من $[0;1]$ ، $f(x)\le 1$. **استنتج أن** $\int_0^1 f(x)dx \le 1$

الحل:

من أجل كل x من $[0;1]$ ، $1+x^2 \ge 1$ و منه من أجل كل x من $[0;1]$ ، $\frac{1}{1+x^2}\le 1$.

نستنتج أن $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \le \int_0^1 1dx$ و بما أن $\int_0^1 1dx = [x]_0^1 = 1$ فإن $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \le 1$.

مثال محلول(2):

f **دالة معرفة على** $[-1;2]$ **بـِ** $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\in[-1;1] \\ 2x-1 & ,x\in[1;2] \end{cases}$. **أحسب** $\int_{-1}^2 f(x)dx$.

الحل:

$$\int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 x^2dx + \int_1^2 (2x-1)dx$$

لدينا: $\int_{-1}^1 x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$ و $\int_1^2 (2x-1)dx = \left[x^2-x\right]_1^2 = 2-0=2$

و منه $\int_{-1}^2 f(x)dx = \frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$.

القيمة المتوسطة لدالة على مجال

تعريف: f دالة معرفة و مستمرة على مجال I . a و b عددان حقيقيان من I حيث $a<b$.

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$ هي العدد الحقيقي: $m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

مثال محلول(3):

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x-1$

أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;2]$.

الحل:

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;2]$ هي العدد الحقيقي m حيث:

$$m=\frac{1}{2-1}\int_{1}^{2}(2x-1)dx=\left[x^{2}-x\right]_{1}^{2}=(4-2)-(1-1)=2$$

حجم مجسم دوراني محوره $(x'x)$

حجم مجسم مولد بالدوران حول المحور $(x'x)$ لمنحن (C) ممثل لدالة f مستمرة و موجبة على مجال $[a;b]$ هو العدد الحقيقي V حيث: $V=\int_{a}^{b}\pi\left[f(x)\right]^{2}dx$

مساحة حيز محدد بمنحنيين:

إذا كانت f و g دالتين مستمرتين على مجال $[a;b]$ بحيث من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x)\geq g(x)$

فإن مساحة الحيز (D) المحدد بالمنحنيين (C_f)، (C_g) و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$

هي: $A=\int_{a}^{b}\left[f(x)-g(x)\right]dx$

<u>تمارين محلولة:</u>

التمرين الأول:

نعتبر التكاملين: $A=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^{2}x\,dx$ **و** $B=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^{2}x\,dx$

- **أحسب** $A+B$ **و** $A-B$ **ثم استنتج** A **و** B.

الحل:

$$A+B=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^{2}x\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^{2}x\,dx=B=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^{2}x+\sin^{2}x\right)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}dx=[x]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}.$$

$$A-B=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^{2}x\,dx-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^{2}x\,dx=B=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^{2}x-\sin^{2}x\right)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$$

لدينا $A+B=\frac{\pi}{4}$ و $A-B=\frac{1}{2}$. بعد حل هذه الجملة نجد $A=\frac{\pi+2}{8}$ و $B=\frac{\pi-2}{8}$.

التمرين الثاني:

نعتبر التكامل $I=\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt$

1) بين أنه من أجل كل t من $[0;1]$ ، $\frac{1}{t^2+1}\leq 1$.

2) استنتج حصرا للعدد I .

الحل:

1) من أجل كل t من $[0;1]$ ، $1+t^2\geq 1$ و منه من أجل كل t من $[0;1]$ ، $\frac{1}{1+t^2}\leq 1$.

2) بما أن $0<1$ و بتطبيق خاصية المحافظة على الترتيب نستنتج أن $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt\leq\int_0^1 1dt$

و بما أن $\int_0^1 1dt=[t]_0^1=1$ فإن $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt\leq 1$. من الواضح كذلك أنه من أجل كل t من $[0;1]$ ، $\frac{1}{1+t^2}>0$

و منه $I>0$. نستنتج هكذا الحصر التالي: $0<I\leq 1$.

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة f **المعرفة على** $]-1;+\infty[$ **بِـ** $f(x)=1+\ln(x+1)$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f **على المجال** $[0;e-1]$ **.**

2. استنتج حصرا لـِ $f(x)$**.**

3. استنتج حصرا للعدد الحقيقي $I=\int_1^{e-1} f(x)dx$

الحل:

1. لدينا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1}{x+1}>0$. إذن f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ و منه على المجال $[0;e-1]$.

2. نستنتج أنه من أجل كل x من $[0;e-1]$ ، $f(0)\leq f(x)\leq f(e-1)$ أي $1\leq f(x)\leq 2$.

3. بتطبيق حصر القيمة المتوسطة نجد $(e-2)\le \int_{1}^{e-1} f(x)dx \le 2(e-2)$.

التمرين الرابع:

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;\pi]$ بـ $f(x)=\frac{1}{2}+\cos x$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم حدد حسب قيم x إشارة $f(x)$.

2. أرسم تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد و متجانس.

3. أحسب A مساحة الحيز المحدد بالمنحي (C) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ، $x=\pi$ و $y=0$.

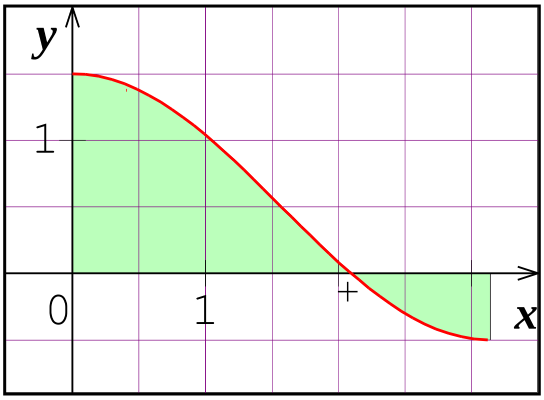
الحل:

1)للدالة f نفس اتجاه تغير الدالة $x\mapsto \cos x$ فهي إذن متناقصة تماما على المجال $[0;\pi]$.

لدينا $f(0)=\frac{3}{2}$ و $f(\pi)=-\frac{1}{2}$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة تقبل المعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا في $[0;\pi]$

$f(x)=0$ تعني $x=\frac{2\pi}{3}$. نستنتج أنه من أجل كل x من $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ ، $f(x)\ge 0$

و من أجل كل x من $\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$ ، $f(x)\le 0$.



2)أنظر الشكل المقابل.

3)لدينا $A=A_1+A_2$ حيث $A_1=\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} f(x)dx$

و $A_2=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} -f(x)dx$.

$A_1=\left[\frac{1}{2}x+\sin x\right]_{0}^{\frac{2\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}u.a$ و $A_2=-\left[\frac{1}{2}x+\sin x\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}=-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}u.a$

و منه $A=\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)u.a$.

التمرين الخامس:

سلطان جرادي

باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب: $I=\int_0^1 (x-1)e^x\,dx$

الحل:

1. نضع $u(x)=x-1$ ، $v'(x)=e^x$ و منه $u'(x)=1$ ، $v(x)=e^x$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا: $I=\left[(x-1)e^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx$

و منه $I=1-\left[e^x\right]_0^1=1-(e-1)=-e$. إذن $I=-e$.

ملاحظة: كان بالإمكان وضع $u(x)=e^x$ ، $v'(x)=x-1$ و من ثم $u(x)=e^x$ ، $v(x)=\frac{1}{2}x^2-x$

إلا أننا بعد التعويض نحصل على تكامل أكثر تعقيدا من الأول.

تمارين مقترحة:

التمرين الأول:

الهدف من هذا التمرين حساب التكاملات التالية:

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} \quad ، \quad J=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx \quad و \quad K=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$$

1. لتكن الدالة f المعرفة على $[0;1]$ كما يلي : $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$

أ- احسب مشتقة الدالة $x\mapsto \sqrt{x^2+2}$

ب- استنتج f' مشتقة الدالة f .

جـ- احسب قيمة I .

2. أ- بدون حساب J و K ، تحقق أن $J+2I=K$.

ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة على K بين أن: $K=\sqrt{3}-J$

جـ- استنتج قيمتي J و K .

التمرين الثاني:

f دالة معرفة على $[0;2]$ بـ $f(x)=(x-2)e^x$

$\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1)ادرس تغيرات f ثم ارسم $\mathcal{C}$.

2)S هي جزء المستوي المحدد بالمنحني $\mathcal{C}$ و محور

الفواصل .احسب القيمة المضبوطة لمساحة S ، ثم أعط

قيمة تقريبية إلى 10^{-2} بالزيادة لهذه المساحة.

3) بالدوران حول المحور $(x'x)$ ، $\mathcal{C}$ تولد مجسما حجمه V

أ- جد الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث تكون الدالة المعرفة بـ $G(x)=(ax^2+bx+c)e^{2x}$ أصلية للدالة f^2

على $\mathbb{R}$.

ب- استنتج القيمة المضبوطة للحجم V ، ثم أعط قيمة تقريبية إلى 10^{-3} بالزيادة لهذا المساحة.

التمرين الثالث:

f الدالة المعرفة على $[0;1]$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}$

1.احسب عبارة المشتقة $f'(x)$ و ادرس إشارتها على $[0;1]$.

2. شكل جدول تغيرات f .

3. ارسم (C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=1cm$

4. احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $y=2$ ، $x=0$ و $x=1$